Análisis Matemático II
Segundo Parcial

Curso: Z 2 0 1 1

Fecha: 17-07-21

Prof. Amed

Apellido y Nombre:...

Ante la eventualidad de falla del sistema enviar a: on tolerancia máxima de diez minutos posteriores al horario de finalización.

Teórico 1: Enunciado y demostración del Teorema de la **Independencia del camino en una integral de línea de un campo de gradientes**.

Teórico 2 : Enunciado y demostración de la **Condición necesaria para la existencia de función potencial**.

Prácticos: Hacer el gráfico correspondiente en cada ejercicio práctico.

1) Por medio de una conveniente aplicación del Teorema de la Divergencia expresar el flujo del campo $\overline{f}(x,y,z)=\left(\frac{1}{3}x^3.y\ ,\ -\frac{x^2}{2}y^2\ ,\ 2z^2\right)$ a través de la superficie $S:\ x^2+y^2+z^2=6z$ con $z\geq x^2+y^2$

---

2) Aplicando Stokes calcular la circulación de $\overline{f}$ a lo largo de la curva $C=S_1\cap S_2$

$S_1: x^2+y^2+z^2=6z$, $S_2:\ z=x^2+y^2$ si el $\operatorname{rot}\overline{f}(x,y,z)=(x\,,y\,,-2z)$

---

3) Expresar el flujo de $\overline{f}(x,y,z)=(-2y\ ,\ 2x\ ,\ z)$ a través de la porción de superficie

$S:\ x^2+y^2+z^2=6z$ con $z\geq x^2+y^2$

---

4) Expresar, en coordenadas cilíndricas la masa del cuerpo del primer octante formado por

$x^2+y^2\leq 4y$, $x^2+y^2+z^2\leq 16$ si la densidad es proporcional a la distancia al eje z

---

AM 2	2° parcial Prof. Amed	HOJA N° 1/3 FECHA 17-7-21

$\boxed{T1}$ Enunciado y demostración del teorema de la independencia del camino en una integral de línea de un campo de gradiente

Sean $\varphi: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, φ diferenciable, D conj. abierto conexo

$\bar{A}$ y $\bar{B} \in D$,

$\bar{g}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\bar{A} = \bar{g}(a)$: inicio $\bar{B} = \bar{g}(b)$: fin

$\bar{F}$ es campo de gradiente $\Rightarrow \bar{F} = \bar{\nabla}\varphi$

$\varphi \to$ función potencial

Dem:

$$\bar{F} = \bar{\nabla}\varphi \Rightarrow \int_c \bar{F}\, d\bar{l} = \int_c \bar{\nabla}\varphi\, d\bar{l} = \int_a^b \bar{\nabla}\varphi(\bar{g}(t))\, \bar{g}'(t)\, dt = \circledast$$

$$= \varphi(\bar{g}(t))\Big|_a^b = \varphi(\bar{g}(b)) - \varphi(\bar{g}(a)) = \varphi(\bar{B}) - \varphi(\bar{A})$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_c \bar{F}\, d\bar{l} = \varphi(B) - \varphi(A)}_{\text{independencia del camino}}$$

$\circledast$ $\varphi(\bar{g}(t))' = \bar{\nabla}\varphi(\bar{g}(t))\, \bar{g}'(t)$

NOTA

$\boxed{T2}$ Enunciado y demostración de la condición necesaria para la existencia de función potencial. para $\mathbb{R}^2$

$\bar{F}: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \;/\; \bar{F}_{(x,y)} = \left(P_{(x,y)}, Q_{(x,y)}\right)$

$\bar{F}$ derivable y continua (dom $\bar{F}$ simplemente conexo)

si $\bar{F}$ admite función potencial $\Rightarrow P'_y = Q'_x$

<u>Dem</u>: $\exists\, U$ (función potencial) tal que:

$$\bar{F}_{(x,y)} = \bar{\nabla} U_{(x,y)}$$

$$\underbrace{\left(P_{(x,y)}, Q_{(x,y)}\right) = \left(U'_x, U'_y\right)}$$

$$P_{(x,y)} = U'_x \Longrightarrow P'_y = U''_{xy}$$

$$Q_{(x,y)} = U'_y \Longrightarrow Q'_x = U''_{yx}$$

por hipótesis: P'_y y Q'_x continuas

x teorema de Schwarz $\Rightarrow \underbrace{U''_{xy} = U''_{yx}}_{P'_y = Q'_x}$

NOTA

AM2	2° parcial Prof Amed	HOJA N° 2/3 FECHA 17-7-21

(P1) Por medio de una conveniente aplicación del teorema de la Divergencia expresar el flujo del campo

$$\bar{F}(x,y,z) = \left(\frac{1}{3}x^3 y,\ -\frac{x^2}{2}y^2,\ 2z^2\right)$$

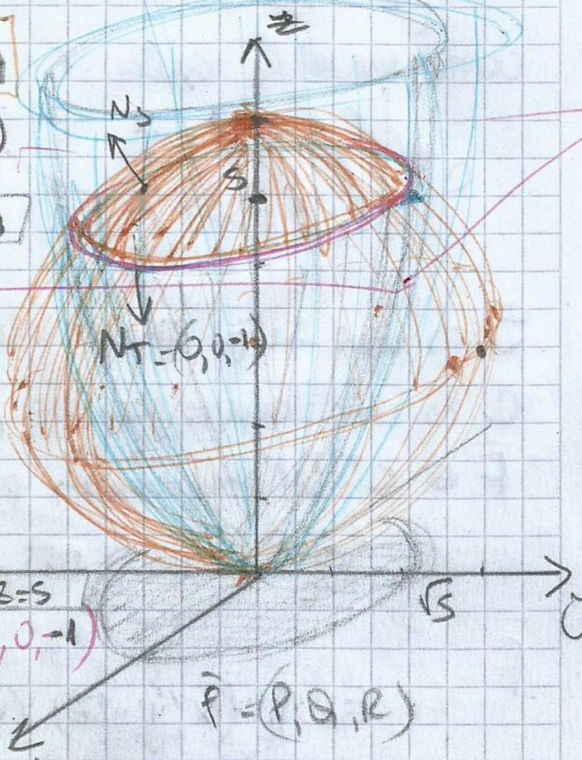
a través de la sup. $S: x^2+y^2+z^2=6z$ con $z \geq \underbrace{x^2+y^2}_{r^2}$

$S: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=6z \Rightarrow \boxed{x^2+y^2+(z-3)^2=9} \\ z \geq x^2+y^2 \end{cases}$

$(z-3)^2 = 9-(x^2+y^2)$

$z \geq 3 \Rightarrow z-3 = \sqrt{9-(x^2+y^2)}$

$\boxed{z = \sqrt{9-(x^2+y^2)}+3}$



$z=5$

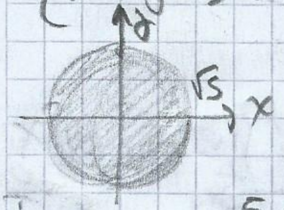
Hallo la intersecc. de

$\begin{cases} x^2+y^2 = 6z-z^2 \\ x^2+y^2 = z \end{cases} \rightarrow 6z-z^2=z$

$5z = z^2$

$\hookrightarrow z=0$

$z=5$



$x = r\cos(t)$
$y = r\sin(t)$

$5 \leq z \leq \sqrt{9-r^2}+3$

$\boxed{T: \text{disco en } z=5}$

$\rightarrow N_T = (0,0,-1)$

$S_T = S \cup T$

$\bar{F} = (P,Q,R)$

$\oint\!\!\oint_{S_T} \bar{F}\,d\bar{\sigma} = \iint_S \bar{F}\,d\bar{\sigma} + \iint_T \bar{F}\,d\bar{\sigma}$

$\oint\!\!\oint_{S_T} \bar{F}\,d\bar{\sigma} = \iiint_W \operatorname{div}(\bar{F})\,dvol = \iiint_W \cancel{x^2y} - \cancel{x^2y} + 4z\,dvol$

S_T sup cerrada orientada al ext. ✓
$\bar{F} \in C^1$ ✓
W región de $\mathbb{R}^3$ cuya frontera es S_T

$\boxed{\text{T Divergencia}}$

C.V. $= 4\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{5}}\int_5^{\sqrt{9-r^2}+3} \underbrace{r}_{Jac}\cdot z\,dz\,dr\,dt =$

$= \cancel{4}^{2}\int_0^{2\pi} dt \int_0^{\sqrt{5}} r\,\frac{z^2}{\cancel{2}}\Big|_5^{\sqrt{9-r^2}+3} dr = 2.2\pi\int_0^{\sqrt{5}} r\left[9-r^2+6\sqrt{9-r^2}+9-25\right] dr =$

$= 4\pi \cdot \frac{57}{4} = \boxed{57\pi = \oint\!\!\oint_{S_T} \bar{F}\,d\bar{\sigma}}$

$\iint_T \bar{F}\,d\bar{\sigma} = \iint_{T_{xy}} \left(\frac{1}{3}x^3y, -\frac{x^2}{2}y^2, 2z^2\right)(0,0,-1)\,dx\,dy =$

$= \iint_{T_{xy}} -2\underset{\substack{\downarrow \\ 5}}{z^2}\,dx\,dy \underset{z=5}{=} -50 \overbrace{\iint_{T_{xy}} dx\,dy}^{\text{Area } T_{xy}} = -50 \times 5\pi$

$\boxed{\iint_T \bar{F}\,d\bar{\sigma} = -250\pi}$

$57\pi = \iint_S \bar{F}\,d\bar{\sigma} - 250\pi \longrightarrow \boxed{\iint_S \bar{F}\,d\bar{\sigma} = 307\pi}$

NOTA

(P2) Aplicando Stokes calcular la circ. de $\bar{F}$ a lo largo de $C = S_1 \cap S_2$

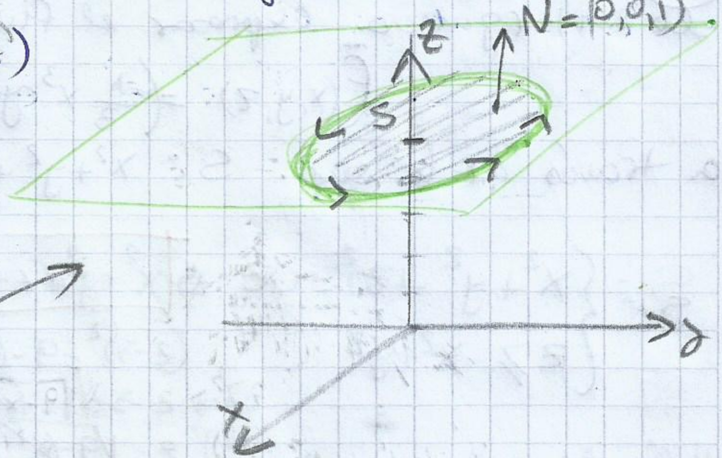
$S_1: x^2+y^2+z^2 = 6\cancel{z}$ $\qquad$ $S_2: z = x^2+y^2$

$rot(\bar{F})(x,y,z) = (x, y, -2z)$

$C: \begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 6z \\ z = x^2+y^2 \end{cases}$

como en el ej anterior

$C: \begin{cases} 5 = x^2+y^2 \\ z = 5 \end{cases}$



S es una sup orientable ($z=5$, circulo $r=\sqrt{5}$)

C es una curva suave, frontera de S

$\bar{F} \in C^1$ (componentes polinómicos)

$$\oint_C \bar{F}\, d\bar{l} = \iint_S rot\,\bar{F}\, d\bar{s} = \iint_S rot(\bar{F})\, \breve{N}\, ds = \iint_{S_{xy}} rot(\bar{F})\, N\, dxdy =$$

$$= \iint_{S_{xy}} (x, y, -2z)\,(0,0,1)\, dxdy = \iint_{S_{xy}} -2z\, dxdy \overset{z=5}{=}$$

$$= -10 \overbrace{\iint_{S_{xy}} dxdy}^{\text{Area } S_{xy}} = -10 \times \pi . \sqrt{5}^2$$

$$\boxed{\oint_C \bar{F}\, d\bar{l} = -50\pi}$$

NOTA

AM 2	2° parcial Prof. Amed	HOJA N° 3/3 FECHA 17-7-2

(3) Expresar el flujo de $f(x,y,z) = (-2y, 2x, z)$ a través de la porción de sup:

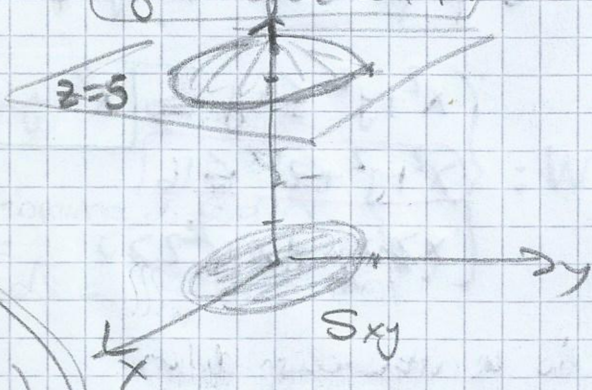
$S: x^2+y^2+z^2 = 6z$ con $z \geq x^2+y^2$

igual que en P1

$$x^2+y^2+(z-3)^2 = 9$$

$$(z-3)^2 = 9-x^2-y^2$$

$z > 3$ $\quad z-3 = \sqrt{9-(x^2+y^2)}$



$$G(x,y,z) = x^2+y^2+(z-3)^2-9$$

$$N = \frac{\nabla G}{|G'_z|} = \left(\frac{2x}{2(z-3)}, \frac{2y}{2(z-3)}, \frac{2(z-3)}{2(z-3)}\right)$$

$$N = \left(\frac{x}{\sqrt{9-(x^2+y^2)}}, \frac{y}{\sqrt{9-(x^2+y^2)}}, 1\right)$$

$$\iint_S \bar{f}\, d\bar{s} = \iint_{S_{xy}} \bar{f} N\, dx\,dy = \iint_{S_{xy}} (-2y, 2x, z)\left(\frac{x}{\sqrt{9-(x^2+y^2)}}, \frac{y}{\sqrt{9-(x^2+y^2)}}, 1\right) dx\,dy =$$

$$= \iint_{S_{xy}} \cancel{\frac{-2yx}{\sqrt{9-(x^2+y^2)}}} + \cancel{\frac{2xy}{\sqrt{9-(x^2+y^2)}}} + z \; dx\,dy \overset{z=5}{=} 5 \underbrace{\boxed{\iint_{S_{xy}} dx\,dy}}_{\pi \cdot \sqrt{5}^2}$$

Área S_{xy}

$$\boxed{\iint_{S_{xy}} \bar{f}\, d\bar{s} = 25\pi}$$

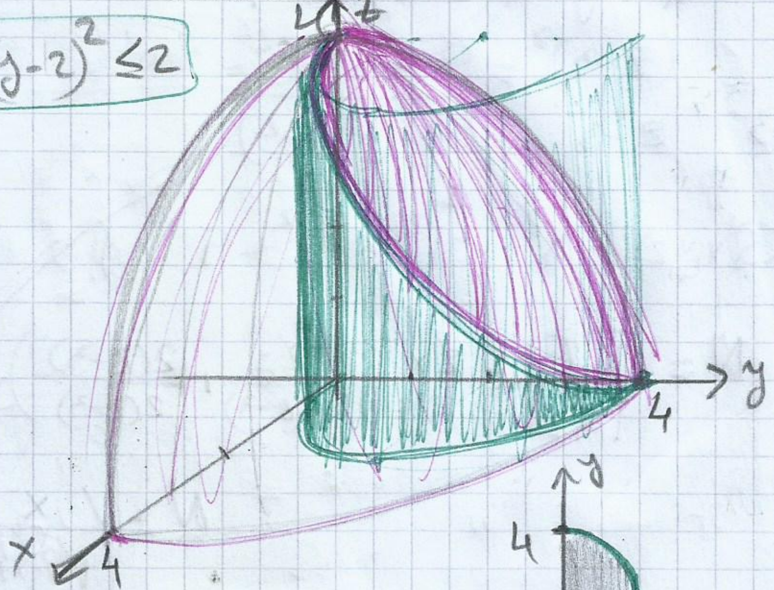
(P4) Expresar, en coord. cilíndricas, la masa del cuerpo del PRIMER OCTANTE formado por $x^2+y^2 \leq 4y$

$x^2+y^2+z^2 \leq 16$

si la densidad es proporcional a la distancia al eje z

δ proporcional al eje z $\rightarrow$ $\boxed{\delta(x,y,z) = k\sqrt{x^2+y^2}}$

$$W: \begin{cases} x^2+y^2 \leq 4y \Rightarrow \boxed{x^2+(y-2)^2 \leq 2} \\ \boxed{x^2+y^2+z^2 \leq 16} \\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0 \end{cases}$$

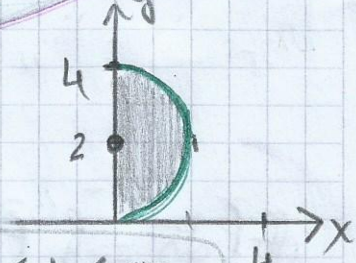


$$\begin{cases} x = r\cos(t) \\ y = r\,\mathrm{sen}(t) + 2 \\ z = z \end{cases}$$

$0 \leq z \leq$ esfera

$0 \leq z \leq \sqrt{16-x^2-y^2}$

$\boxed{0 \leq z \leq \sqrt{16-r^2}}$



$$\boxed{\begin{array}{c} -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq 2 \end{array}}$$

$$\text{Masa} = \iiint_W \delta(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = k\iiint_W \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz =$$

$$\overset{\text{c.v.}}{=} k\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^2\int_0^{\sqrt{16-r^2}} \underbrace{r}_{\text{Jac}}\ r\,dz\,dr\,dt =$$

$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{r^2} \overset{r \geq 0}{=} r$

$$= k\int_{-\pi/2}^{\pi/2} dt \int_0^2 r^2\sqrt{16-r^2}\,dr = k\pi \cdot 9{,}826957589$$

$$\boxed{\text{Masa} \cong 9{,}83\,k\pi}$$

NOTA